ステファン問題の漸近解 (流体力学における非定常問題)

徳田, 尚之

数理解析研究所講究録
449巻 1982年 44-56

ステファン問題の漸近解

宇都宮大 教養 徳田 尚之

§.1 いとぐち.

"動く自由境界問題"として知られる問題の中で最も代表的なものはステファン問題である。この自由境界問題では場の方程式の解の一部として境界形状そのものを求めなければならず，その非線形結合のため解を求めるのに大変な困難をともなう。ステファン問題のラグランジュ・ビルマン（以下 L-B と略す）展開を用いた級数解の求め方については前報（徳田 1979）で述べたがここでは収束しない漸近解を L-B 展開によって求める方法を示す。

我々の発展させた L-B展開の骨子は次の通りである。まず，問題の記述に表われる物理面上の変数を，1ーパラメータ群の変換群により，新らしい L-B 座標面上に変換する。L-B 変換と呼ばれるこの変換は，偏微分方程式の解を求め

る時によく用いられる相似変換と密接に関係している。まず解はL−B面でのベキ展開により組立てる。この方法の一番の利点はL−B面での級数の収束性が大巾に改善されていることである。物理的な解は，L−B面から物理面に逆変換することにより求めることが出来る。物理面からL−B面への変換の数学的基礎はHenrici (1974) に詳しい。L−B面から物理面への逆変換についての数学的基礎は目下著者が準備中である。本論文では数学的な基礎には触れないで応用面のみ述べることにしたい。

§2. 一相ステファン問題と基礎方程式

こゝで考える問題は一相で，相変化を誘起する冷却面はNewtonの放熱条件とする。時間 $t=0$ で出来上る相（例えば氷相）の厚さを $X=0$ とし，瞬間的に冷媒が流れ始め氷相が形成されるとすれば，無次元温度 u を支配する温度場の方程式と境界条件は（徳田 1979 をみよ）.

$$\epsilon \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = u(0,t) = u_w(t), \qquad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(X,t) = \frac{dX}{dt}, \qquad (3)$$

$$u(X,t) = 1, \qquad (4)$$

$$X(0) = 0. \qquad (5)$$

こゝでXは$x=0$の冷却壁から測った氷相の厚さであり，x，tはともに無次元化された距離，時間変数である。この問題に現われる唯一の無次元パラメータϵは

$$\epsilon = k(u_s - u_0)/\rho L \qquad (6)$$

こゝでρは密度，Lは潜熱，kは熱伝達係数，u_s，u_0はそれぞれ相変化温度，u_0は冷媒の温度である。殆んどの物質でこの潜熱Lが比較的大きく，$\epsilon \sim 0.01 \sim 0.1$程度の小さな値をとることが知られている。

式(1)～(5)に対して$t \to 0$の領域での収束する級数解はTao (1979)，徳田(1979)により求められている。殊に$\epsilon = 0$の極限を考えると容易に確認出来る様に

$$X = \sqrt{1+2t} - 1 \qquad (7)$$

$$u_w = 1/\sqrt{1+2t} \qquad (8)$$

という厳密解をもっていることが分る。こゝで注意したいのは(7)，(8)式で$t \to \infty$を考えると

$$X \sim \sqrt{2t}, \qquad u_w \sim 0$$

となり，壁面が放熱条件でなく温度指定のNeumannの厳密解に近づくことである。Neumannの解は(Carleslaw & Jeaser 1960)は次の様に表わされる。

$$X = 2\alpha\, t^{1/2} \qquad (9)$$

$$\alpha\, \mathrm{erf}(\sqrt{\epsilon}\alpha)\exp(\epsilon\alpha^2) = \frac{\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{\pi}} \qquad (10)$$

(9)式のαは超越方程式(10)の解で，次の級数解をもつ；

$$\alpha = \frac{1}{12}\left(1 - \frac{\epsilon}{6} + \frac{31}{720}\epsilon^2 + \cdots\right) \qquad (11)$$

$\epsilon = 0$の解(9)が$t \to \infty$の式(7)の解と一致していることが容易に分る。この$t \to \infty$での解の振舞いを頭において(1)~(5)式までの漸近解を求めてみよう。

§3 ラグランジュ・ビルマン展開

前報の方法（徳田1979）に従って，(1)~(5)式をL-B面に変換してみよう．(1)~(5)の解が$t \to \infty$でNeumannの解に漸近することから次の様なL-B変数を導入してみよう．

$$\eta = \frac{x}{X} \quad , \quad \tau = X\frac{dX}{dt^*} - 2 \qquad (12)$$

ここで，

$$t^* = \alpha^2 t \qquad (13)$$

であり，αは(9)，(10)を満足する解である。以下$\frac{d}{dt^*}$を・で表わすことにしよう．

(12)式を(1)~(5)式に代入して

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \epsilon\alpha^2(\tau+2)\eta\frac{\partial u}{\partial \eta} = \epsilon\alpha^2 \underline{\frac{u_w}{1-u_w}} X^2(1-u) + \epsilon\alpha^2 \underline{\frac{d\tau}{dt}} X^2 \frac{\partial u}{\partial \tau} \qquad (14)$$

$$X\frac{u_w}{1-u_w} = \frac{\partial u}{\partial \eta}(0,\tau) \qquad (15)$$

$$\frac{X\dot{X}}{1-u_w} = \alpha^2 \frac{\partial u}{\partial \eta}(1,\tau) \qquad (16)$$

$$u(0,\tau) = 0 \qquad (17)$$

$$u(1,\tau) = 1 \qquad (18)$$

$$X(0) = 0 \qquad (19)$$

(895 L-8頁上で)

(14)～(19)式がηとτのみの関数として扱えるには，下線を施した項 $\frac{\dot{u}_w}{1-u_w}X^2$ と $\frac{d\tau}{dt^*}X^2$ がτのみの関数として表わされることが必要である。これが可能であることを示すには，従属変数 X，u_w 従ってτが次の展開をもつと仮定しよう。

$$X \sim 2t^{*1/2} + c_2 + c_{30}\frac{\ln t^*}{t^{*1/2}} + c_{31}\frac{1}{t^{*1/2}} + \cdots, \qquad (20)$$

$$u_w \sim d_1/t^{*1/2} + d_2/t^* + d_{30}\ln t^*/t^{*3/2} + d_{31}/t^{*3/2} + \cdots, \qquad (21)$$

$$\tau = X\dot{X} - 2 \sim c_2/t^{*1/2} + 2c_{30}/t^* + \cdots. \qquad (22)$$

式(22)の逆変換は容易に求めることが出来て，

$$1/t^{*1/2} \sim 1/c_2\left(\tau - \frac{2c_{30}}{c_2^2}\tau^2 + \cdots\right). \qquad (23)$$

式(20),(21),(22),(23)を用いると，(14)式の下線部の項は次の展開をもつことが分る。

$$\frac{d\tau}{dt^*}X^2 \sim -\frac{2c_2}{t^{*1/2}} - \frac{2c_2^2+8c_{30}}{t^*} + \cdots = a_1\tau + a_2\tau^2 + \cdots \qquad (24)$$

$$\frac{\dot{u}_w}{1-u_w}X^2 \sim -\frac{2d_1}{t^{*1/2}} - \frac{(4d_2+2c_2d_1+2d_1^2)}{t^*} + \cdots = b_1\tau + b_2\tau^2 + \cdots \qquad (25)$$

ここで

$$a_1 = -2\,, \quad a_2 = -\left(2 + \frac{4C_{30}}{C_2^2}\right) \tag{26}$$

$$b_1 = -\frac{2d_1}{C_2}\,, \quad b_2 = \left(4\frac{C_{30}d_1}{C_2^3} - 4\frac{d_2}{C_2^2} - \frac{2d_1}{C_2} - \frac{2d_1^2}{C_2^2}\right) \tag{27}$$

式(24),(25)を(14)式に代入すると u は η でのみの関数であることが分る。よって u は τ について次の様な漸近べき展開をもつと仮定しよう。*(注)

$$u(\eta,\tau) \sim u_0(\eta) + \tau u_1(\eta) + \tau^2 u_2(\eta) + \cdots \tag{28}$$

式(28)を式(14),(17),(18)に代入すると u_0, u_1,… を支配する方程式は

$$u_0'' + 2\epsilon d^2 \eta u_0' = 0\,, \qquad u_0(0) = 0,\ u_0(1) = 1 \tag{29}$$

$$u_1'' + 2\epsilon d^2 \eta u_1' + 2\epsilon d^2 u_1 = \epsilon d^2 b_1(1-u_0) - \epsilon d^2 \eta u_0'$$

$$u_1(0) = u_1(1) = 0 \tag{30}$$

$$u_2'' + 2\epsilon d^2 \eta u_2' + 4\epsilon d^2 u_2 = \epsilon d^2\{a_2 u_1 + b_2(1-u_0) - b_1 u_1 - \eta u_1'\}\,, \qquad u_2(0) = u_2(1) = 0 \tag{31}$$

$\vdots$

境界条件(15),(16)は,従って次の漸近展開をもつ.

(注)* (28)式の展開が正しいかどうかは,この展開により求めた解が境界条件(15),(16)式,即ち(32),(33)式又は(34),(35)式を満足出来る解になっているかどうかによる。

$$x\frac{u_w}{1-u_w} \sim u_0'(0) + \tau u_1'(0) + \tau^2 u_2'(0) + \cdots \qquad (32)$$

$$\frac{x\dot{x}}{1-u_w} \sim \alpha^2 \left\{ u_0'(1) + \tau u_1'(1) + \tau^2 u_2'(1) + \cdots \right\} \qquad (33)$$

一方，式(20), (21), (22)の関係から式(24), (25)を求めた手順と全く同様に式(32), (33)は次の展開をもたねばならない。

$$x\frac{u_w}{1-u_w} \sim 2d_1 + \frac{(d_1c_2 + 2d_2 + 2d_1^2)}{t^{*1/2}} + 2\frac{(d_{30} + d_1c_{30})\ln t^*}{t^*} + \frac{(d_1c_{31} + 2d_{31} + c_2d_1^2 + 2d_1^3)}{t^*}$$
$$+ \cdots = 2d_1 + \frac{(d_1c_2 + 2d_2 + 2d_1^2)}{c_2}\tau + \frac{2(2d_{30} + d_1c_{30})}{c_2^2}\tau^2\ln\tau$$
$$+ \frac{(2d_1^2 + c_2d_1)(d_1 + 2c_{30}) + d_1c_{31} + 2d_{31}}{c_2^2}\tau^2 + \cdots \qquad (34)$$

$$\frac{x\dot{x}}{1-u_w} \sim 2\alpha^2 + \frac{c_2 + 2d_1}{t^{*1/2}} + \frac{(2c_{30} + c_2d_1 + 2d_1^2)}{t^*} + \cdots$$
$$= 2\alpha^2 + \frac{c_2 + 2d_1}{c_2}\tau + \left(c_2d_1 + 2d_1^2 - \frac{4c_{30}d_1}{c_2^2}\right)\frac{\tau^2}{c_2^2} + \cdots \qquad (35)$$

よって式(29)～(31)の解から求まる(32), (33)式の展開と，式(20), (21), (22)式から求められた展開式(34), (35)が一致することが必要である。もし未定係数 c_2, c_{30}, $c_{31}, \cdots$, d_1, d_2, d_{30}, $d_{31}, \cdots$ を矛盾なく求めることが出来れば正しい L-B 展開が出来たことになる。例えば式(20), (21) の c_{30}, d_{30} 等の対数項が必要となったのはこの様な手順を踏んだ結果分かった。

§4. L－B展開の係数の決定

u_0と係数d_1

(24)式を満たす解u_0は

$$u_0 = \frac{\mathrm{erf}(\sqrt{\epsilon}\alpha\eta)}{\mathrm{erf}(\sqrt{\epsilon}\alpha)} = \frac{\mathrm{erf}(Y)}{\mathrm{erf}(\sqrt{\epsilon}\alpha)} \qquad (36)$$

こゝで $Y=\sqrt{\epsilon}\alpha\eta$ である。

$$u_0'(0) = \frac{2\sqrt{\epsilon}\alpha}{\sqrt{\pi}\,\mathrm{erf}(\sqrt{\epsilon}\alpha)} = 2\alpha^2\exp(\epsilon\alpha^2) \qquad (37)$$

$$u_0'(\sqrt{\epsilon}\alpha) = 2 \qquad (38)$$

式(34)と(37)の比較からd_1が定まる。

$$d_1 = \alpha^2\exp(\epsilon\alpha^2) \qquad (39)$$

式(35)と(38)の初項は一致していることに注意されたい。

u_1と係数c_2, d_2

(30)式を満足するu_1は

$$u_1 = \frac{b_1}{2}(1-u_0) + \frac{Y}{2}u_0' - \frac{b_1}{2}\exp(-Y^2) + \frac{\alpha^2 - \frac{b_1}{2}\exp(-\epsilon\alpha^2)}{Dw(\sqrt{\epsilon}\alpha)}Dw(Y) \quad (40)$$

こゝでDwはDawson積分と呼ばれていて次式で定義される

。

$$Dw(Y) = \exp(-Y^2)\int_0^Y \exp(t^2)\,dt \qquad (41)$$

$$u_1'(Y) = \frac{1-b_1}{2}u_0' + \frac{Y}{2}u_0'' + b_1 Y\exp(-Y^2) + \frac{\alpha^2 - \frac{b_1}{2}\exp(-\epsilon\alpha^2)}{Dw(\sqrt{\epsilon}\alpha)}\{-2Y\,Dw(Y)+1\}$$

(42)

(42)式の $u_1(\sqrt{\epsilon}\alpha)$ の値を(33)式に代入し，(35)式の第二項と比較すると c_2，b_1 が求まる。

$$c_2 = -1 \quad , \quad b_1 = 2d_1 = 2\alpha^2 \exp(\epsilon\alpha^2) \tag{43}$$

(42)の結果を使うと u_1は次の様に簡単になる。

$$u_1(Y) = d_1(1-u_0) + \frac{Y}{2}u_0' - d_1 \exp(-Y^2)$$

全く同じ手順で(42)式の $u_1'(\sqrt{\epsilon}\alpha)$ の値を(32)式に代入し，(34)式の第二項目と比較すれば

$$d_2 = 0 \tag{44}$$

<u>u_2と c_{30}，d_{30}，d_{31}</u>

式(31)を満たす解 u_2は，

$$u_2 = \frac{b_2}{4}(1-u_0) + \frac{a_2-b_1}{2}u_1 + \frac{1}{2}(Yu_1' + 2u_1) - \frac{Y\exp(-Y^2)}{2\sqrt{\epsilon}\alpha}\Big[d_1(1-2d_1) + \\ + \frac{d_1 b_2}{2\alpha^2}DW_1(\sqrt{\epsilon}\alpha)\Big] + \frac{b_1}{4}DW_1(Y) \tag{45}$$

ここで

$$DW_1(Y) = -1 + 2Y\exp(-Y^2)\int_0^Y \exp(t^2)dt = -1 + 2YDW(Y) \tag{46}$$

であり，係数 b_2，a_2は式(26)，(27)で与えられる。

u_1 の時と同じ手順で少し長い計算の結果

$$c_{30} = -\frac{\epsilon\alpha^2 + d_1(1-d_1)(1-\frac{1}{2\alpha^2})}{2\left[(1-\frac{1}{2\alpha^2})d_1 - 1\right]} \tag{47}$$

$$d_{30} = -\frac{d_1 c_{30}}{2} \tag{48}$$

$$d_{31} = -\frac{d_1 c_{31}}{2} + \frac{d_1^2}{2}\left[\left(\frac{1}{2\alpha^2}-1\right) + \left(1-\frac{1}{2\alpha^2}\right)d_1 - \frac{\sqrt{\epsilon}}{\alpha}(1-d_1)Dw(\sqrt{\epsilon}\alpha)\right]$$
$$- c_{30}\, d_1^2\left[\left(1-\frac{1}{2\alpha^2}\right) + \frac{\sqrt{\epsilon}}{\alpha}Dw(\sqrt{\epsilon}\alpha)\right] \qquad (49)$$

この段階ではc_{31}は決まらない係数である。従って(49)式から明らかな様にd_{31}も決まらない。これは，(22)式の展開で$O(1/t)$までにはc_{31}が現われないことに起因しており次のオーダの展開で求まるものと思われる。

§5. L-B展開の物理面への逆変換

ここで時間を(13)式のtに戻すと，§4の結果は次の如くまとめることができよう。

$$x \sim 2\alpha t^{1/2} - 1 + \frac{\epsilon\alpha^2 + \left(1-\frac{1}{2\alpha^2}\right)d_1(1-d_1)}{2\left[\left(1-\frac{1}{2\alpha^2}\right)d_1 - 1\right]}\frac{\ln\alpha^2 t}{\alpha^2 t} + \frac{c_{31}}{\alpha^2 t} + \cdots \qquad (50)$$

$$u_w \sim \frac{d_1}{\alpha t^{1/2}} - \frac{d_1 c_{30}}{2}\frac{\ln\alpha^2 t}{\alpha^3 t^{3/2}} + \frac{d_{31}}{\alpha^3 t^{3/2}} + \cdots \qquad (51)$$

$$\tau \sim -\frac{1}{\alpha t^{1/2}} + \frac{2c_{30}}{\alpha^2 t} + \cdots \qquad (52)$$

$$x\frac{u_w}{1-u_w} \sim 2d_1 + d_1(1-2d_1)\tau + \left[d_1^2\left\{\left(\frac{1}{2\alpha^2}-2\right) + \left(3-\frac{1}{2\alpha^2}\right)d_1 - \frac{\sqrt{\epsilon}}{\alpha}(1-d_1)Dw(\sqrt{\epsilon}\alpha)\right\}\right.$$
$$\left. + 2c_{30}d_1\left\{-1 + \left(3-\frac{1}{2\alpha^2}\right)d_1 + \frac{\sqrt{\epsilon}}{\alpha}Dw(\sqrt{\epsilon}\alpha)\,d_1\right\}\right]\tau^2 + \cdots \qquad (53)$$

$$\frac{x\dot{x}}{1-u_w} \sim 2\alpha^2 + (1-2d_1)\tau + \left[d_1(2d_1-1) + 4c_{30}d_1\right]\tau^2 + \cdots \qquad (54)$$

ここで

$$d_1 = \alpha^2\exp(\epsilon\alpha^2), \quad c_{30} = \frac{\epsilon\alpha^2 + \left(1-\frac{1}{2\alpha^2}\right)d_1(1-d_1)}{2\left[\left(1-\frac{1}{2\alpha^2}\right)d_1 - 1\right]}$$

式(50),(51)の物理面の展開と式(52),(53)のL-B面での展開を比較してみると次の二点に気がつく。第1は，物理面ではx, u_w共に対数項が存在するのに，L-B面には存在しない。第2の点は前述した様に$O(1/t)$の項までの展開で，物理面の展開には未定係数(c_{31}, d_{31})が存在するのにL-B展開では完全に各係数が決まっていることである。これは式(22)又は(52)で明らかな様にtでの展開の$O(1/t)$にはc_{30}しか現われずc_{31}は関与しないことからも推定される。L-B面の展開にも高次の項では関数の非解析性を示す対数項が現われるかどうかは興味のある問題である。

式(53),(54)のL-B展開は漸近展開で収束はしない展開と思われる。ただし，もしx, u_w自体には特異点があったとしても，$x\frac{u_w}{1-u_w}$等の組合せがお互いの特異点を除去する様なものであれば，上のL-B展開は収束級数になる可能性もあることを付け加えておこう。ここでは式(53),(54)のL-B展開での解を変換公式(12)を使って物理面へ逆変換する方法を示す。逆変換は(53),(54)式の第1項，第2項，---，第n項までを取り逆変換する方法で詳しくは前報(徳田1979)を参照されたい。以下上記の変換を第1次，第2次..，第n次変換とそれぞれ呼ぶことにする。

第1次逆変換

L-B展開(53),(54)の第1項のみを考える。

$$x^{(1)}\frac{u_w^{(1)}}{1-u_w^{(1)}} = 2\alpha^2\exp(\epsilon\alpha^2) \tag{55}$$

$$\frac{x^{(1)}\dot{x}^{(1)}}{1-u_w^{(1)}} = 2\alpha^2 \tag{56}$$

ここで上添字 $^{(1)}$ は第1次変換による解を示す。(55),(56)は容易に解くことが出来て

$$x^{(1)} = 2\alpha\sqrt{t+\alpha^2\exp^2(\epsilon\alpha^2)} - 2\alpha^2\exp(\epsilon\alpha^2) \tag{57}$$

$$u_w^{(2)} = \frac{\alpha^2\exp(\epsilon\alpha^2)}{\sqrt{t+\alpha^2\exp^2(\epsilon\alpha^2)}} \tag{58}$$

第2次逆変換

L-B展開の第2項までを考える。

$$x^{(2)}\frac{u_w^{(2)}}{1-u_w^{(2)}} = 2\alpha^2\exp(\epsilon\alpha^2) + \alpha^2\exp(\epsilon\alpha^2)(1-2\alpha^2\exp(\epsilon\alpha^2))\tau^{(2)} \tag{59}$$

$$\frac{x^{(2)}\dot{x}^{(2)}}{1-u_w^{(2)}} = 2\alpha^2 + (1-2\alpha^2\exp(\epsilon\alpha^2))\tau^{(1)} \tag{60}$$

ここで

$$\tau^{(2)} = x^{(2)}\dot{x}^{(2)} - 2\alpha^2 \tag{61}$$

(59),(60)の解は

$$d_1 C\sqrt{(C+x^{(2)})+D^2} + 2\alpha^2(1-2d_1)\log\frac{C+x^{(2)}+\sqrt{(C+x^{(2)})^2+D}}{C+\sqrt{C^2+D}} + Cx^{(2)} + \frac{x^{(2)2}}{2} = 4\alpha^2 d_1 t + d_1 C\sqrt{C^2+D} \tag{62}$$

ただし $C = 1-2\alpha^2+4\alpha^2 d_1$, $D = 16\alpha^2 d_1^2(1-2d_1)$, $d_1 = \alpha^2\exp(\epsilon\alpha^2)$

である。

以下同様に高次の逆変換に進むことが出来よう。3次以上は解析的に解を求めることは不可能なので数値解に頼らざるを得ないと思われる。詳細な数値例は別の論文に紹介する予定である。

参考文献

Carleslaw, H.S & Jeager, J.C 1960 "Conduction of Heat in Solids" Oxford University Press.

Henrici, P 1974 "Applied and Computational Complex Analysis" Vol 1, John Wiley & Sons.

Taa, L.N 1979 "Free Boundary Problems with Radiation Boundary Conditions" Quarterly of Applied Mathematics, Vol 37.

Tokuda, N. 1972 "ステファン問題の級数解" 京大数理解析研講究録.